

INTERFERENZA.

Da un punto di vista generale, con il nome di *interferenza* andrebbero indicati tutti quei fenomeni che derivano dalla sovrapposizione di onde luminose diverse in una certa regione: in realtà ci si limita a considerare sotto questo nome esclusivamente quei processi nei quali si osserva che la distribuzione dell'ampiezza (e dell'intensità) prodotta in una regione da ciascuna delle singole onde individualmente viene drasticamente alterata dalla presenza contemporanea delle altre: si può passare (frange di interferenza) da punti ove l'ampiezza è all'incirca la somma delle ampiezze delle singole onde a punti ove la perturbazione è praticamente nulla.

I fenomeni di interferenza di maggior interesse e che considereremo sono quelli prodotti da due onde di *uguale frequenza*.

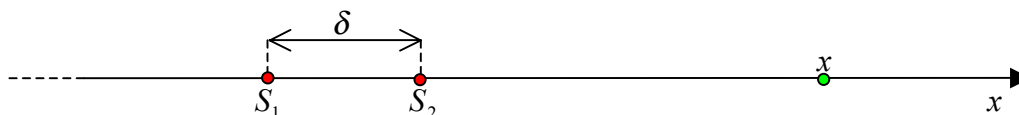
Fasci di luce coerente e non coerente.

Al fine di produrre una figura di interferenza, è necessario che le differenze di fase nei singoli punti dello schermo non cambino nel tempo. Quando si verifica questa condizione, possiamo affermare che i raggi provenienti da due sorgenti sono *coerenti*. La coerenza è una proprietà di cui possono godere tutti i tipi di onde.

Se consideriamo due sorgenti di luce S_1 ed S_2 del tutto indipendenti, come due filamenti incandescenti situati fianco a fianco, sullo schermo non si avranno frange di interferenza, bensì un'illuminazione relativamente uniforme. Possiamo interpretare questo fenomeno facendo l'ipotesi ragionevole che, per due sorgenti luminose indipendenti, la differenza di fase tra i due raggi che arrivano in un punto P sullo schermo vari nel tempo a caso. A un certo istante possono sussistere le condizioni per un minimo e poco dopo (ad esempio 10^{-8} sec.) quelle per un massimo. L'occhio non riesce a seguire queste rapide variazioni e percepisce solo un'illuminazione uniforme. In ogni punto l'intensità è uguale alla somma delle intensità che ciascuna delle due sorgenti S_1 ed S_2 produrrebbe separatamente in per quel punto. Si dice che i fasci emessi in queste condizioni da S_1 ed S_2 sono del tutto *incoerenti*.

Interferenza fra onde da due sorgenti.

Consideriamo il caso di interferenza di due onde sinusoidali (*coerenti*) che, oltre a propagarsi nella stessa direzione e verso, abbiano la stessa ampiezza e frequenza. Le sorgenti di luce sono S_1 ed S_2 e il punto in cui misuriamo l'interferenza sia a distanza $x \gg \lambda$.



$$\begin{cases} E_1 = E_0 \sin(kx - \omega t + \alpha_1) \\ E_2 = E_0 \sin[k(x + \delta) - \omega t + \alpha_2] \end{cases}$$

indichiamo: $\phi_1 = kx - \omega t + \alpha_1$ e $\phi_2 = k(x + \delta) - \omega t + \alpha_2$,

così:

$$\begin{cases} E_1 = E_0 \sin \phi_1 \\ E_2 = E_0 \sin \phi_2 \end{cases}$$

Sappiamo che:

$$I = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \langle E^2 \rangle_T = c \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2}$$

(**N.B.** L'intensità qui non è quella istantanea)

L'intensità associata alla corrente singolarmente risulta:

$$I_1 = c \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2}$$

$$I_2 = I_1 = I_0 = c \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2}$$

$$E^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 = E_0^2 \sin^2 \phi_1 + E_0^2 \sin^2 \phi_2 + 2 E_0^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2$$

poniamo:

$$\Delta = \phi_1 - \phi_2 = k\delta + \Delta_\alpha, \text{ con } \Delta_\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\Sigma = \phi_1 + \phi_2 = 2(kx - \omega t) + k\delta + \alpha_1 + \alpha_2$$

Consideriamo la media temporale su di un periodo T del quadrato del campo elettrico:

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle_T &= \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle_T = \langle E_1^2 \rangle_T + \langle E_2^2 \rangle_T + \langle 2 E_1 E_2 \rangle_T = \\ &= E_0^2 \langle \sin^2 \phi_1 \rangle_T + E_0^2 \langle \sin^2 \phi_2 \rangle_T + 2 E_0^2 \langle \frac{1}{2} [\cos \Delta - \sin \Sigma] \rangle_T = \frac{E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2} + E_0^2 \cos \Delta = \\ &= E_0^2 (1 + \cos \Delta) \end{aligned}$$

L'intensità luminosa risulta:

$$I = c \varepsilon_0 E_{\text{efficace}}^2 = c \varepsilon_0 E_0^2 (1 + \cos \Delta) = 2 I_0 (1 + \cos \Delta) = 4 I_0 \cos^2 \left(\frac{\Delta}{2} \right)$$

$$I = 4 I_0 \cos^2 \frac{\Delta}{2}$$

$$\begin{aligned} I &\begin{cases} \rightarrow I_{\max} = 4 I_0 \text{ quando } \cos^2 \frac{\Delta}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\Delta}{2} = m \pi \Rightarrow \frac{k\delta + \Delta_\alpha}{2} = m \pi \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{2m\pi - \Delta_\alpha}{k}} \\ \text{con } m \in N \\ \rightarrow I_{\min} = 0 \text{ quando } \cos^2 \frac{\Delta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{2} = (2m+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{k\delta + \Delta_\alpha}{2} = (2m+1) \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{(2m+1)\pi - \Delta_\alpha}{k}}, \text{ con } m \in N \end{cases} \end{aligned}$$

se $\Delta_\alpha = 0$

$$I_{\max} = 4 I_0 \text{ quando } \delta = \frac{2m\pi}{k} \Rightarrow \boxed{\delta = m\lambda}, \text{ con } m \in N$$

$$I_{\min} = 0 \text{ quando } \delta = \frac{(2m+1)\pi}{k} \Rightarrow \boxed{\delta = (2m+1) \frac{\lambda}{2}}, \text{ con } m \in N$$

L'esperimento di Young.

Consideriamo una sorgente monocromatica e puntiforme S che chiameremo primaria: come è suggerito dallo schema la realizzazione della sorgente puntiforme S può effettuarsi ponendo un diaframma con un foro molto piccolo davanti ad una lampada; S_1 ed S_2 sono due sorgenti secondarie coerenti ottenute praticando due fori molto piccoli su uno schermo disposto in modo che la congiungente di S con il punto medio del segmento $S_1 S_2$ sia normale allo schermo stesso.

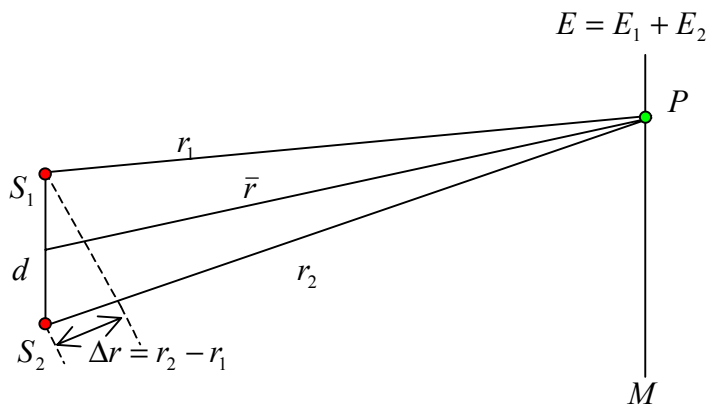
Dalle due sorgenti secondarie emergono treni di onde sferiche coerenti e per esse si possono ripetere le considerazioni già fatte per il caso di due sorgenti di onde elastiche sferiche.

Distribuzione spaziale dell'intensità luminosa.

Per giungere ad una descrizione quantitativa della distribuzione dell'intensità della luce sullo schermo (M), si consideri un punto P su di esso. Le distanze di P dalle due sorgenti siano r_1 ed r_2 e di conseguenza le onde provenienti da tali sorgenti percorrono distanze che differiscono per $\Delta r = r_2 - r_1$. Se si suppone che tanto r_2 quanto r_1 siano molto maggiori di Δr , $\mathbf{r}_1$ ed $\mathbf{r}_2$ si possono considerare approssimativamente paralleli.

Indichiamo con $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}$ i vettori del campo elettrico in P dell'onda che perviene da S_1 , di quella che perviene da S_2 e dell'onda risultante rispettivamente. Cominciamo con l'osservare che è in generale $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ e, che in particolare è $E = E_1 + E_2$ se $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{E}_2$ sono costantemente paralleli: ciò si dà se la direzione di propagazione delle due onde è la stessa e se, inoltre, le due onde sono costantemente polarizzate allo stesso modo.

Queste due circostanze sono verificate nel nostro caso; la prima in quanto $\mathbf{r}_1$ ed $\mathbf{r}_2$ sono approssimativamente paralleli, la seconda in quanto, in virtù dell'artificio adottato, le due onde derivano in realtà da una medesima onda (quella che da S incide sullo schermo forato). Per quanto riguarda dunque la relazione spaziale tra le onde potremo scrivere:



in questo caso per $\bar{r} \gg d$ si ha:

$$\delta \rightarrow \Delta r$$

E_1 ed E_2 sono grandezze variabili periodicamente nel tempo con la stessa frequenza; esse sono in fase nei punti S_1 ed S_2 , mentre in P esse sono sfasate della quantità costante: $\Delta = k \delta = k \Delta r$, poiché $\Delta_\alpha = 0$ come detto.

Quindi:

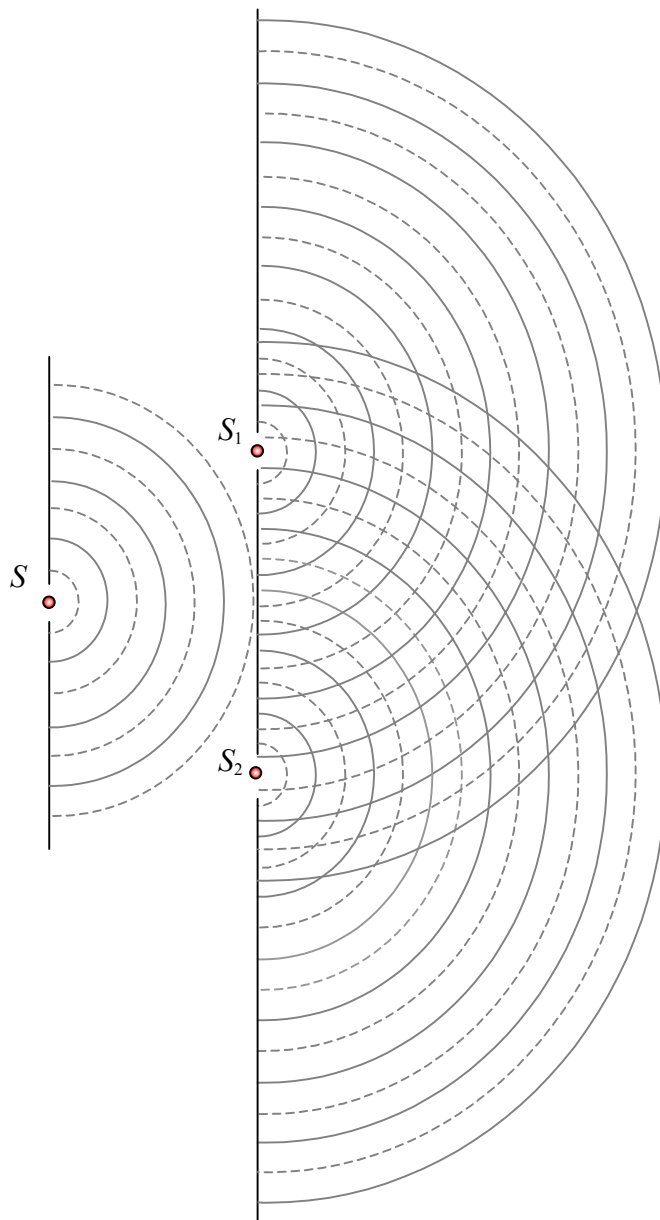
$$I_{\max} = 4I_0 \text{ quando } \boxed{\Delta r = r_2 - r_1 = m \lambda}, \text{ con } m \in N$$

$$I_{\min} = 0 \text{ quando } \boxed{\Delta r = r_2 - r_1 = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}}, \text{ con } m \in N$$

Nel campo risultante si possono considerare iperbolioidi aventi fuochi in S_1 ed S_2 e che sono luoghi dei punti caratterizzati da una differenza di cammino ottico, per le onde provenienti dalle due sorgenti secondarie, uguali a multipli pari di $\frac{\lambda}{2}$ od a multipli dispari di $\frac{\lambda}{2}$: in corrispondenza ai punti degli iperbolioidi della prima famiglia le onde provenienti dalle due sorgenti giungono in fase e l'ampiezza della disturbanza ottica risultante è massima; in corrispondenza ai punti degli iperbolioidi della seconda famiglia le onde giungono in opposizione di fase e, l'ampiezza della disturbanza ottica risultante è minima.

LINEE DI INTERFERENZA

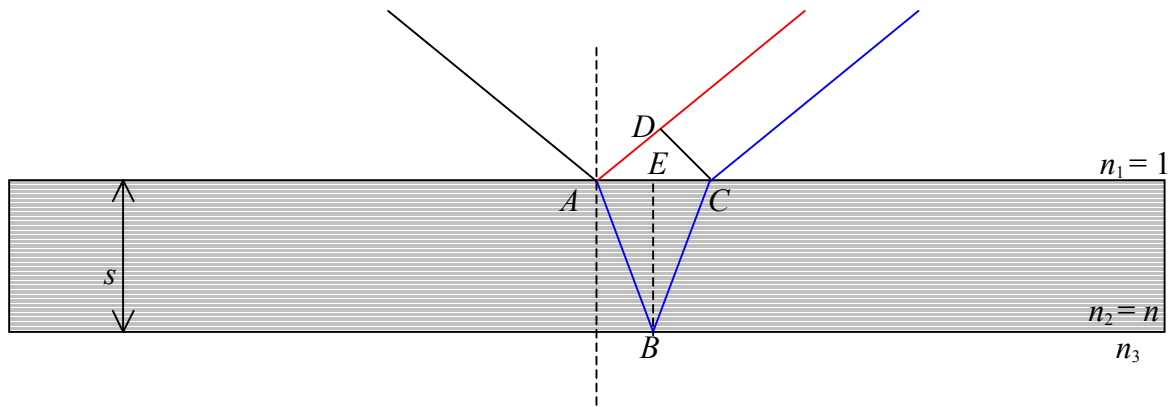
- Massima intensità
— Minima intensità



N.B. I fronti d'onda sferici procedenti dalle due sorgenti S_1 ed S_2 sono segnati per la perturbazione massima positiva da una linea continua e per la perturbazione massima negativa da una linea tratteggiata.

Interferenza in lamine sottili.**1) CASO: RIFLESSIONE.**

Noi consideriamo il caso in cui, $n_1 = 1$, $n_2 = n$ ed $n \gg n_3$ per cui l'interfaccia 2-3 è totalmente riflettente per qualsiasi valore di t .



Dobbiamo calcolare la differenza di cammino ottico:

$$\Delta L = n(AB + BC) - 1 AD$$

Da considerazioni geometriche si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} AB = BC \\ s = AB \cos t \Rightarrow AB = \frac{s}{\cos t} \\ AE = AB \sin t \\ AC = 2AE \\ AD = AC \sin i = 2AE \sin i = 2AB \sin t \sin i = \frac{2s}{\cos t} \sin t \sin i \end{cases}$$

per cui sostituendo si ha:

$$\Delta L = 2n AB - 1 AD = \frac{2ns}{\cos t} - \frac{2s}{\cos t} \sin t \sin i$$

moltiplicando e dividendo il secondo termine del secondo membro per $\sin t$ si ha:

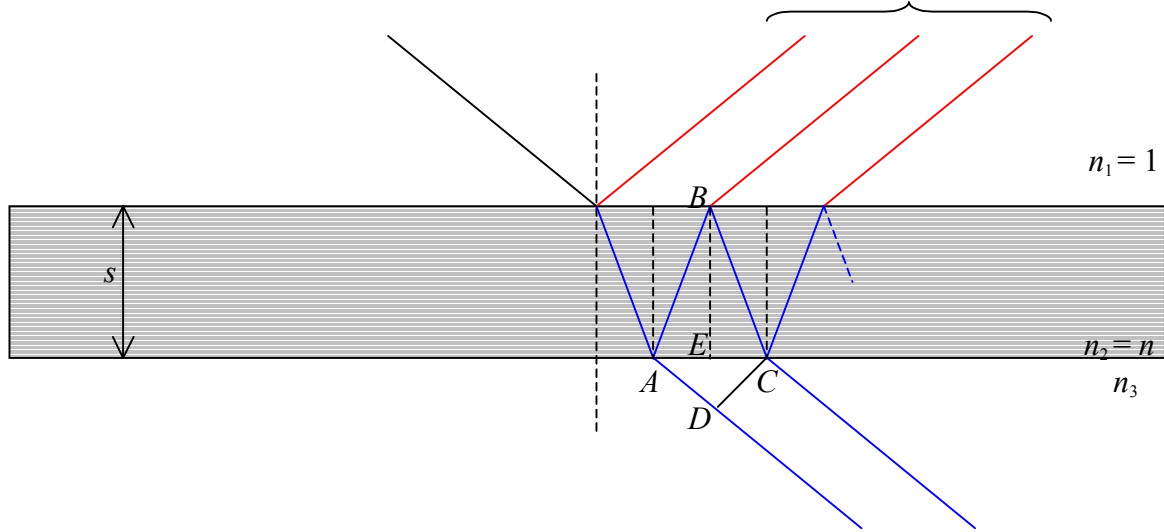
$$\Delta L = \frac{2ns}{\cos t} - \frac{2s}{\cos t} \frac{\sin i}{\sin t} \sin^2 t \text{ e visto che per la legge di Snell si ha: } \frac{\sin i}{\sin t} = n$$

possiamo scrivere:

$$\Delta L = \frac{2ns}{\cos t} - \frac{2ns}{\cos t} \sin^2 t = \frac{2ns}{\cos t} (1 - \sin^2 t) = \frac{2ns}{\cos t} \cos^2 t = \boxed{2ns \cos t}$$

2) CASO: TRASPARENZA (o TRASMISSIONE).

(i raggi riflessi non ci interessano in questo caso)



Il problema di determinare la differenza di cammino ottico è geometricamente uguale perciò si perviene allo stesso risultato:

$$\Delta L = 2 n s \cos t$$

Dalla differenza di cammino possiamo passare alla differenza di fase infatti come visto precedentemente possiamo scrivere:

$$\Delta = k\delta + \Delta_\alpha$$

dove $\delta = \Delta L$ e Δ_α è uguale a π nel caso di riflessione e 0 nel caso di trasparenza, quindi si ha:

$$\Delta\phi_{\text{riflessione}} = k \Delta L + \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L + \pi = \frac{4\pi}{\lambda} n s \cos t + \pi$$

$$I_{\max} = 4I_0 \text{ quando } \frac{\Delta\phi_{\text{riflessione}}}{2} = m\pi \Rightarrow \frac{k \Delta L + \pi}{2} = m\pi \Rightarrow \Delta L = \frac{2m\pi - \pi}{k} \Rightarrow \Delta L = (2m-1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta L = (2m'+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \boxed{n s \cos t = (2m'+1)\frac{\lambda}{4}}, \text{ con } m' \in N$$

e

$$I_{\min} = 0 \text{ quando } \frac{\Delta\phi_{\text{riflessione}}}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{k \Delta L + \pi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta L = \frac{(2m+1)\pi - \pi}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta L = \frac{2m\pi}{k} \Rightarrow \Delta L = m\lambda \Rightarrow \boxed{n s \cos t = m\frac{\lambda}{2}}, \text{ con } m \in N$$

$$\Delta\phi_{\text{trasparenza}} = k \Delta L = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L = \frac{4\pi}{\lambda} n s \cos t$$

$$I_{\max} = 4I_0 \text{ quando } \Delta L = \frac{2m\pi}{k} \Rightarrow \Delta L = m\lambda \Rightarrow \boxed{n s \cos t = m\frac{\lambda}{2}}, \text{ con } m \in N$$

$$I_{\min} = 0 \text{ quando } \Delta L = \frac{(2m+1)\pi}{k} \Rightarrow \Delta L = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \boxed{n s \cos t = (2m+1)\frac{\lambda}{4}}, \text{ con } m \in N$$