OTTICA GEOMETRICA.

Velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi isotropi.

Le onde elettromagnetiche (e quindi anche la luce) si propagano *nel vuoto* alla velocità:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

mentre in un mezzo materiale:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

I materiali che trasmettono la luce sono generalmente non ferromagnetici e perciò tipicamente μ_r non differisce da 1 di più di 10^{-4} quindi $\mu_r \cong 1$, da cui:

$$v \cong \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Costante dielettrica ed indice di rifrazione.

È quindi la costante dielettrica relativa ε_r che determina la velocità della luce in un materiale. Tuttavia le costanti dielettriche incontrate precedentemente non possono essere usate in questa equazione perché i valori sono caratteristici di situazioni *statiche*. Infatti, ricordiamo che la costante dielettrica è in realtà una misura della risposta dei dipoli (permanenti o indotti) ad un campo elettrico esterno. Se il campo esterno varia ad alta frequenza, i dipoli possono non avere il tempo di rispondere e quindi non si possono impiegare le costanti dielettriche statiche nel caso di un campo **E** rapidamente variabile. Alle frequenze caratteristiche delle onde luminose (10^{15} *Hertz*), il campo oscilla troppo rapidamente perché i dipoli possano seguirlo completamente. Inoltre, ε_r nella equazione varia in funzione della frequenza, sicché *la velocità della luce nella materia dipende dalla lunghezza d'onda o dalla frequenza della luce.*

Possiamo anche scrivere l'equazione di prima:

$$v \cong \frac{c}{n}, \quad \text{con } n = \sqrt{\varepsilon_r} \text{ indice di rifrazione del mezzo}$$

Cammino ottico.

Il concetto di cammino ottico della radiazione luminosa ha particolare importanza nell'ambito dell'ottica geometrica, ma ha anche interesse nelle considerazioni geometriche che si fanno nei processi di interferenza quando c'è da considerare la propagazione da un punto ad un altro.

Consideriamo la distanza percorsa da una radiazione luminosa nel vuoto nel tempo Δt:

$$L_{ottico} = c\,\Delta t$$

e la distanza percorsa nello stesso tempo dalla radiazione nello stesso tempo in un mezzo di indice di rifrazione *n*:

$$L = v\,\Delta t$$

facendo il rapporto otteniamo:

$$\frac{L_{ottico}}{L} = \frac{c}{v}\frac{\Delta t}{\Delta t} = n$$

Se la luce si propaga in un mezzo di indice di rifrazione *n* per una distanza *L*, si definisce cammino ottico la lunghezza:

$$\boxed{L_{ottico} = L\,n}$$

pari alla distanza che la radiazione percorrerebbe nel vuoto nello stesso tempo impiegato a percorrere la distanza L nel mezzo di indice di rifrazione n.

Se la radiazione per passare da un punto ad un altro si propaga per tratti successivi L_i in mezzi di indice di rifrazione diversi n_i impiegando il tempo:

$$\Delta t = \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i \ ,$$

con Δt_i tempo impiegato dalla radiazione a coprire la distanza L_i nel mezzo di indice di rifrazione n_i

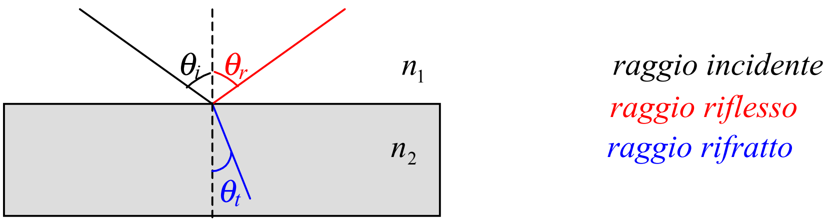
$$\Delta t_i = \frac{L_i}{v_i}$$

$$\Delta t = \sum_{i=1}^{N} \frac{L_i}{v_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{L_i}{c} n_i = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{N} L_i n_i$$

$$\boxed{L_{ottico} = \sum_{i=1}^{N} L_i n_i}$$

N.B. La somma si trasforma in integrale nel caso di mezzi il cui indice di rifrazione varia con continuità.

Il Principio di Fermat.
In condizioni di equilibrio il cammino ottico è stazionario o è minimo o è massimo (miraggi).



LEGGE DELLA RIFLESSIONE.
Il raggio riflesso giace nel piano di incidenza, cioè quello determinato dal raggio incidente e dalla normale nel punto di incidenza alla superficie riflettente, e:

$$\boxed{\theta_i = \theta_r}$$

cioè l'angolo formato dal raggio incidente e la normale alla superficie di separazione, è pari all'angolo formato dal raggio riflesso con la stessa normale.

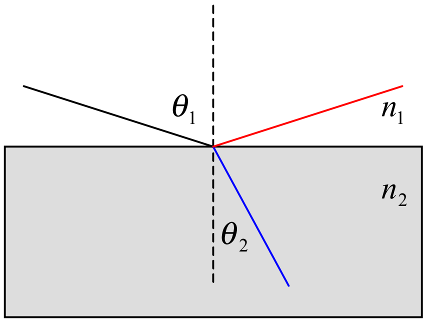
LEGGE DI RIFRAZIONE.
Il raggio rifratto giace nel piano di incidenza, e:

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}} \qquad \textbf{Legge di Snell}$$

con n_{21} *indice di rifrazione del secondo mezzo rispetto al primo.*

Si osservi che se $n_2 > n_1$, cioè il raggio passa da un mezzo a velocità v_1 ad uno a velocità v_2 inferiore ($v_2 < v_1$), si ricava dalla II legge della rifrazione:

$$\boxed{\theta_1 > \theta_2}$$



cioè il raggio rifratto si avvicina alla normale.
Esso esiste per qualsiasi θ.

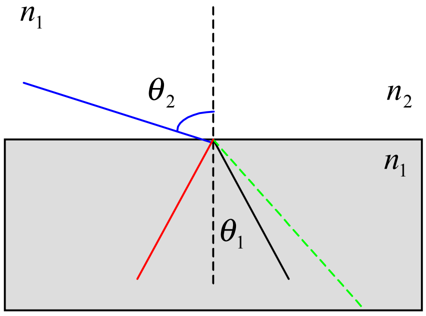
Se invece accade $n_1 > n_2$ (cioè $v_2 > v_1$) si ha:

$$\boxed{\theta_1 < \theta_2}$$

in tal caso la rifrazione accade per angoli θ fino al valore limite (θ_L) per cui $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ cioè:

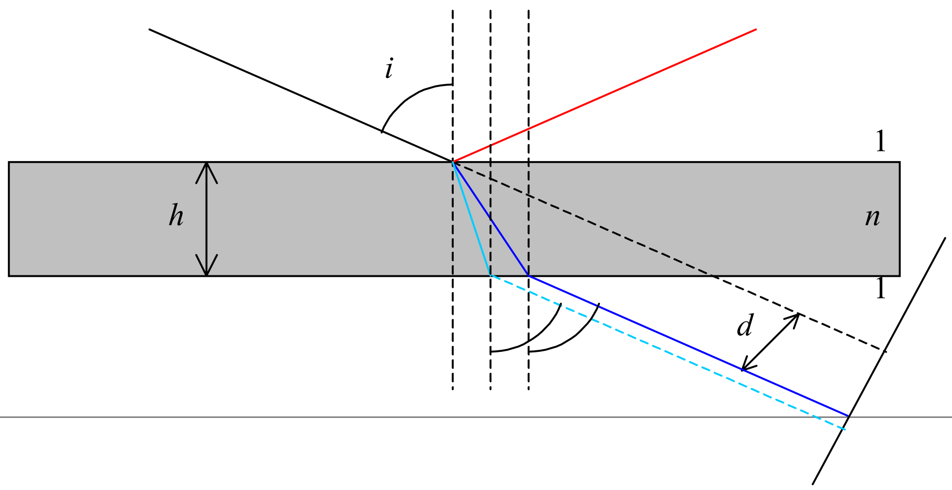
$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_L}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\theta_L = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\boxed{\theta_L = \operatorname{arcsen}\frac{n_1}{n_2}}$$



per $\theta \geq \theta_L$ la rifrazione manca e tutta l'energia del raggio incidente si trova nel raggio riflesso (riflessione totale).

Lamina a facce piane e parallele.
Si consideri una lastra a facce piane e parallele di un materiale trasparente avente indice di rifrazione *n*, immersa in un mezzo di indice di rifrazione uguale ad 1 (aria). Se un raggio di luce monocromatica incide su una faccia con un angolo *i* esso emerge, dopo aver subito due rifrazioni, parallelamente alla direzione originaria, ma subisce uno spostamento laterale *d*.



Semplici considerazioni trigonometriche insieme con la con la legge di rifrazione consentono di arrivare al risultato:

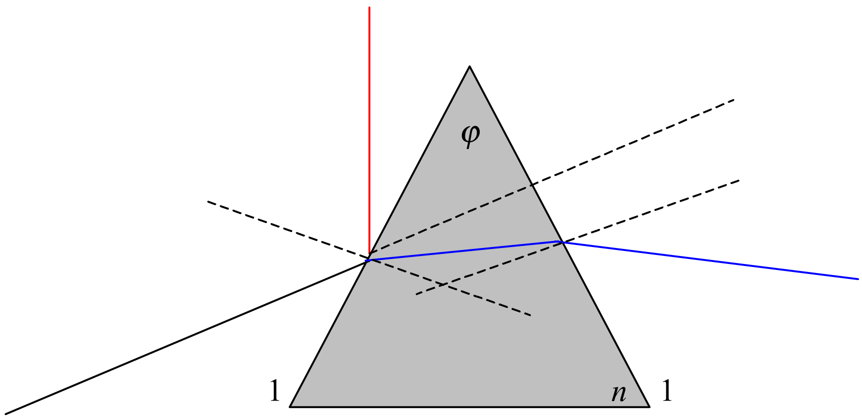
$$d = h \operatorname{sen} i \left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i}} \right)$$

cioè: $$d = d\big(h, i, n(\lambda)\big)$$

quindi se fissiamo lo spessore h e l'angolo di incidenza i, la distanza d dipenderà solo dalla lunghezza d'onda λ; così se fissati h ed i facciamo incidere un fascio di luce bianca in uscita vedremo vari colori anche se in questo caso non sarà molto evidente.

Il prisma. Dispersione della luce.

Consideriamo adesso il caso in cui il raggio subisce ancora due rifrazioni su facce piane, ma queste non siano parallele; si tratta cioè non più di una lastra, ma di un prisma [sempre trasparente, avente indice di rifrazione n ed immerso in un mezzo di indice di rifrazione uguale ad 1 (aria)].
Supponiamo di avere un prisma a sezione normale triangolare e limitiamoci a considerare il caso in cui il raggio incidente e quelli originati per rifrazione si trovino tutti in un piano normale agli spigoli del prisma. Il raggio attraversa il prisma incontrandone due facce che formano tra loro l'angolo φ (angolo rifrangente del prisma). Dalla costruzione dei raggi rifratti risulta evidente che *le deviazioni prodotte dalle due successive rifrazioni si sommano*.



Si trova che:

$$\beta = \beta\big(\varphi, i, n(\lambda)\big)$$

quindi se fissiamo l'angolo rifrangente φ e l'angolo di incidenza i, l'angolo di deviazione totale β dipenderà solo dalla lunghezza d'onda λ; così se fissati φ ed i facciamo incidere un fascio di luce bianca in uscita vedremo vari colori ed in questo caso sarà molto evidente.

Questa potere di scomporre raggi di luce policromatica (come quella bianca) nelle sue radiazioni componenti si dice <u>*dispersivo*</u>.

Per molti materiali vale la seguente dipendenza parabolica di n da λ:

$$\boxed{n^2(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}}$$ formula della dispersione di Cauchy

Per ricavare i coefficienti A e B basta conoscere due indici di rifrazione n_1 ed n_2 in corrispondenza delle rispettive lunghezze d'onda λ_1 ed λ_2, cioè risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} n_1^2 = A + \dfrac{B}{\lambda_1^2} \\ n_2^2 = A + \dfrac{B}{\lambda_2^2} \end{cases}$$

Intensità.

$I = S = \varepsilon\, v\, E^2$

I_i intensità dell'onda *incidente*

I_r intensità dell'onda *riflessa*

I_t intensità dell'onda *rifratta*

I_a intensità dell'onda *assorbita*

Per la conservazione dell'energia (ponendo per ora $I_a = 0$):

$$I_i = I_r + I_t$$

da cui dividendo per I_i:

$$1 = \frac{I_r}{I_i} + \frac{I_t}{I_i}$$

e ponendo:

$\rho = \dfrac{I_r}{I_i}$ *coefficiente di riflessione*

$\tau = \dfrac{I_t}{I_i}$ *coefficiente di trasmissione*

quindi possiamo scrivere:

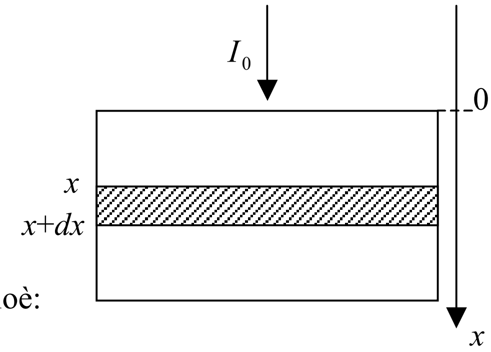
$$\boxed{\rho + \tau = 1}$$

N.B. Poiché $I \propto E^2$, come si vede dalla relazione scritta sopra, si ha: $\rho = \dfrac{E_r^2}{E_i^2}$ e $\tau = \dfrac{E_t^2}{E_i^2}$.

Assorbimento.
In generale, oltre alla trasmissione ed alla riflessione della luce, bisogna considerare l'assorbimento di energia luminosa da parte del mezzo (vedi a proposito nel Sette la propagazione delle onde in un conduttore).
Consideriamo una radiazione monocromatica incidente un mezzo la quale in ingresso ha una intensità I_0.
Se supponiamo che essa abbia intensità *I* in un certo punto a distanza *x* dall'origine, tale intensità si riduce di *dI* per uno spostamento *dx* nel mezzo.
In simboli:

$x \rightarrow I(x) < I_0$

$x + dx \rightarrow I(x) - dI$



tale *dI* può porsi proporzionale a *dx* ed in genere anche ad *I*, cioè:

$$dI \propto -I\,dx \;\Rightarrow\; dI = -\alpha\, I\, dx$$

dove α è un coefficiente che ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, è chiamato <u>*coefficiente di assorbimento*</u> e dipende dal *mezzo* e dalla *lunghezza d'onda* (λ).
L'intensità varia dal valore iniziale alla sorgente I_0 in accordo con la relazione:

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\int_0^x \alpha\, dx \;\Rightarrow\; \ln\frac{I}{I_0} = -\alpha\, x \;\Rightarrow\; \boxed{I = I_0 e^{-\alpha x}}$$