LE EQUAZIONI DI MAXWELL E LE ONDE ELETTROMAGNETICHE.

CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI RAPIDAMANTE VARIABILI.

Vedi Amaldi.

CORRENTE DI SPOSTAMENTO.

Posto $\mathbf{J}_S = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, definiamo <u>*corrente di spostamento*</u> la quantità scalare:

$$i_S = \Phi_A(\mathbf{J}_S) = \int_A \mathbf{J}_S \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$

così che la IV equazione di Maxwell si può scrivere:

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_S \qquad (\, C_\gamma(\mathbf{H}) = i_v + i_S \,)$$

LE EQUAZIONI DI MAXWELL.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l \\ \nabla \wedge \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J}_v + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi_S(\mathbf{D}) = q_l \\ C_\gamma(\mathbf{E}) = -\dfrac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \\ \Phi_S(\mathbf{B}) = 0 \\ C_\gamma(\mathbf{H}) = i_v + \dfrac{d\Phi(\mathbf{D})}{dt} \end{cases}$$

Esse permettono di trattare in modo completo il problema della determinazione del campo elettromagnetico generato nello spazio da un qualsiasi sistema di cariche in movimento.
Date le assai rilevanti difficoltà matematiche ci limitiamo a considerare *casi estremamente particolari*.
Consideriamo una regione dello spazio, riempita da una sostanza isolante, omogenea, isotropa, di costante dielettrica ε e permeabilità magnetica μ. Supponiamo che in tale regione non vi siano cariche elettriche né ferme ($\rho = 0$) né in movimento ($\mathbf{J}_v = 0$).
In queste condizioni le equazioni di Maxwell si riducono a:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B} = \varepsilon\,\mu\,\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

avendo tenuto conto delle relazioni $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$ ed avendo portato fuori dal segno di derivata la costante ε.

Queste equazioni vettoriali, che determinano la propagazione dell'energia del campo elettromagnetico attraverso lo spazio, corrispondono ad 8 equazioni scalari (1 per la I, 3 per la II, 1 per la III, 3 per la IV) che sono:

$$\left.\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0\right\}\quad \text{I}$$

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial B_x}{\partial t}&=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\\ -\frac{\partial B_y}{\partial t}&=\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\\ -\frac{\partial B_z}{\partial t}&=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad \text{II}$$

$$\left.\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0\right\}\quad \text{III}$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon\,\mu\frac{\partial E_x}{\partial t}&=\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\\ \varepsilon\,\mu\frac{\partial E_y}{\partial t}&=\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\\ \varepsilon\,\mu\frac{\partial E_z}{\partial t}&=\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad \text{IV}$$

ONDE ELETTROMAGNETICHE PIANE IN UN MEZZO OMOGENEO (ε,μ).

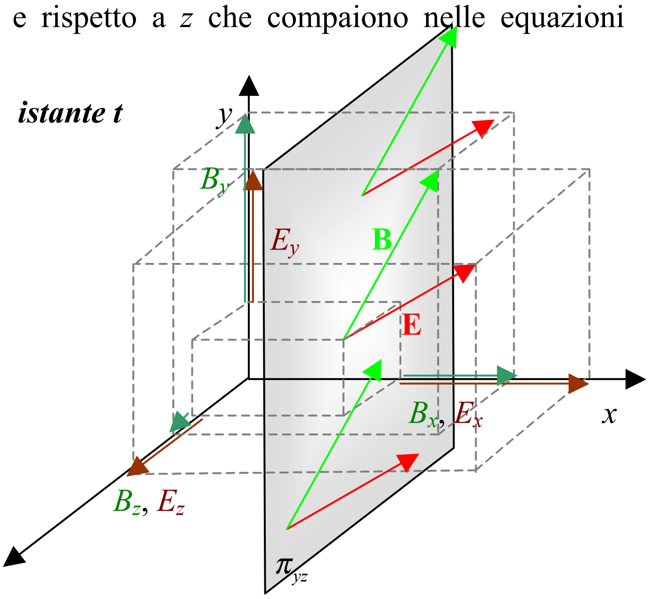
A solo scopo di semplicità consideriamo il caso particolare in cui, fissato un sistema di assi cartesiani, sia il campo **E** che l'induzione magnetica **B**, ad un dato istante, sono funzioni, per esempio solo della variabile x, mentre non variano al variare di y e z. Ciò significa che ad un dato istante, fissato un piano ortogonale all'asse delle x, i vettori **E** e **B** hanno lo stesso valore in tutti i punti di questo piano. Questo caso viene indicato con il nome di *caso delle onde piane*.

Imporre dunque che **E** e **B** dipendano solo dalle variabili x e t [$\mathbf{E}=\mathbf{E}(x,t)$ e $\mathbf{B}=\mathbf{B}(x,t)$] significa porre uguali a zero tutte le derivate rispetto a y e rispetto a z che compaiono nelle equazioni precedenti.

Quindi con la condizione: $\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}=0$

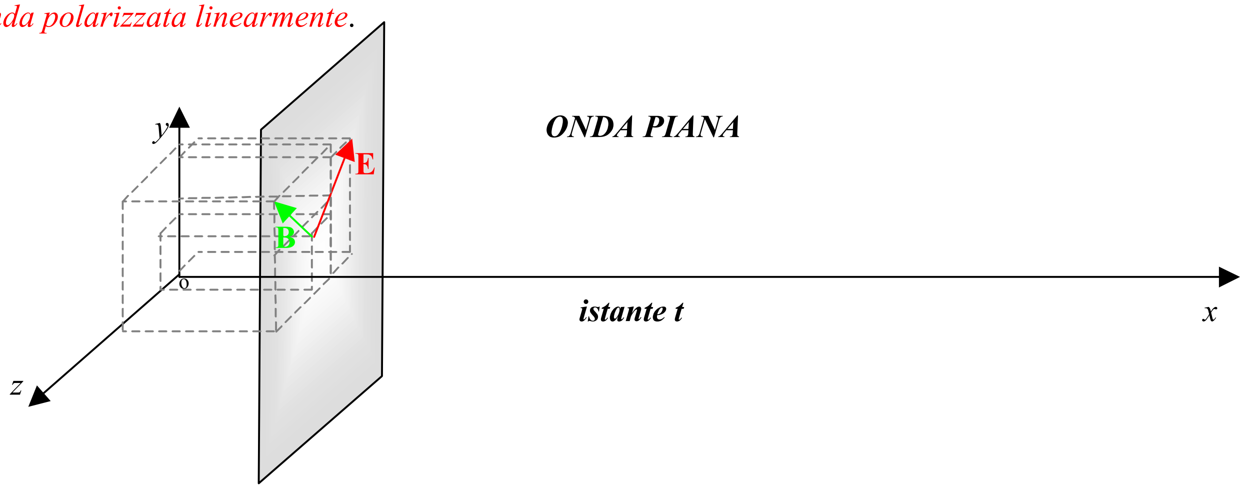
Le equazioni diventano:

$$\begin{cases}\frac{\partial E_x}{\partial x}=0;\ \frac{\partial E_x}{\partial t}=0\ \Rightarrow\ E_x(x,t)=costante\\ \frac{\partial B_x}{\partial x}=0;\ \frac{\partial B_x}{\partial t}=0\ \Rightarrow\ B_x(x,t)=costante\\ \left.\begin{aligned}\varepsilon\,\mu\frac{\partial E_y}{\partial t}&=-\frac{\partial B_z}{\partial x};\ -\frac{\partial B_y}{\partial t}=-\frac{\partial E_z}{\partial x}\\ \varepsilon\,\mu\frac{\partial E_z}{\partial t}&=\frac{\partial B_y}{\partial x};\ -\frac{\partial B_z}{\partial t}=\frac{\partial E_y}{\partial x}\end{aligned}\right\}\quad (\#)\end{cases}$$



Le prime 4 equazioni ci dicono semplicemente che E_x e B_x sono sempre costanti, sia rispetto a x che rispetto a t; tali componenti, se diverse da zero, rappresentano campi uniformi e costanti che

evidentemente non si propagano e quindi non fanno parte dell'onda. Possiamo quindi porli uguali a zero ($E_x = 0, B_x = 0$) senza che per questo il fenomeno che a noi interessa venga minimamente alterato, dato che sia il campo elettrico che il campo magnetico variabile giacciono sempre in piani ortogonali all'asse *x*. Quindi abbiamo: $\mathbf{E} \equiv (0, E_y, E_z)$ e $\mathbf{B} \equiv (0, B_y, B_z)$. Si ha quindi che il campo che si propaga come onde è diretto trasversalmente alla direzione di propagazione (*x*), cioè che *le onde elettromagnetiche sono trasversali*.
Le rimanenti 4 equazioni servono a determinare le quattro componenti E_y, E_z, B_y, B_z; dall'esame di queste equazioni si vede subito che 2 legano E_z a B_y, e le altre 2 E_y a B_z.
Approfittando di questo fatto possiamo studiare un tipo particolare di onda piana ossia la così detta *onda polarizzata linearmente*.



ONDE PIANE POLARIZZATE LINEARMENTE.
Essa si ottiene imponendo che il campo elettrico **E** vibri parallelamente ad una ben determinata direzione, per esempio quella dell'asse delle *z*. In altre parole imponiamo le condizioni $|\mathbf{E}| = E_z$ e $E_y = 0$. Introducendo queste condizioni nelle equazioni di prima si ottiene:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$$

ossia la componente dell'induzione magnetica nella direzione dell'asse delle *z* è costante e si può porre uguale a zero (per gli stessi motivi visti precedentemente). Quindi abbiamo $\mathbf{E} \equiv (0,0,E_z)$ e $\mathbf{B} \equiv (0, B_y, 0)$.
Concludendo possiamo dire che in un'onda piana polarizzata linearmente, i vettori **E** e **B** giacciono sempre in un piano ortogonale all'asse delle *x*; e se si prende l'asse delle *z* nella direzione del vettore **E**, l'induzione magnetica risulta automaticamente nella direzione dell'asse delle *y*; ossia **E** e **B** sono ortogonali fra loro e all'asse delle *x*.
Consideriamo dunque le ultime equazioni rimaste:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (*)$$

derivando la prima rispetto a *t* e la seconda rispetto a *x* si ottiene:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t \partial x}$$

che, eliminando $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t}$, si riconducono a:

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}}$$

In modo analogo, derivando la prima rispetto a *x* e la seconda rispetto a *t*, si ottiene:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}}$$

Quindi E_z e B_y soddisfano l'equazione differenziale alle derivate parziali del tipo:

$$\boxed{\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial t^2}}$$

avendo posto: $$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$

La costante *c* è indipendente dal mezzo e, come si riconosce dalle dimensioni di ε_0 e di μ_0, ha le dimensioni di una velocità; il suo valore numerico si ricava facendo uso dei valori di ε_0 e di μ_0:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \ \frac{metro}{secondo}$$ ed è la *velocità della luce nel vuoto*

L'integrale generale dell'equazione differenziale è:

$$\boxed{C(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)}$$

dove *f* e *g* sono funzioni arbitrarie dei loro argomenti. Esse rappresentano rispettivamente un'onda *progressiva* ed una *regressiva* nella direzione *x*.
La presenza, nella soluzione generale, di un termine rappresentante un'onda regressiva, cioè procedente verso la sorgente, non deve stupire. Infatti se il mezzo è limitato, sulla superficie limite di esso avvengono fenomeni di riflessione, talché, in effetti, nel generico punto del mezzo sarà presente l'onda emanata dalla sorgente, e quindi progressiva, e, insieme, quella riflessasi alla superficie limite, e quindi regressiva; di ciò la soluzione generale dà debito conto.
Così nel nostro caso possiamo porre:

$$E_z = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt) \quad \text{e} \quad B_y = \varphi'(x - vt) + \psi'(x + vt)$$

Per esprimere il legame fra le funzioni arbitrarie che entrano nelle espressioni di E_z e B_y, si osservi che le loro derivate prime sono legate dalle equazioni (*).
Otteniamo così che:

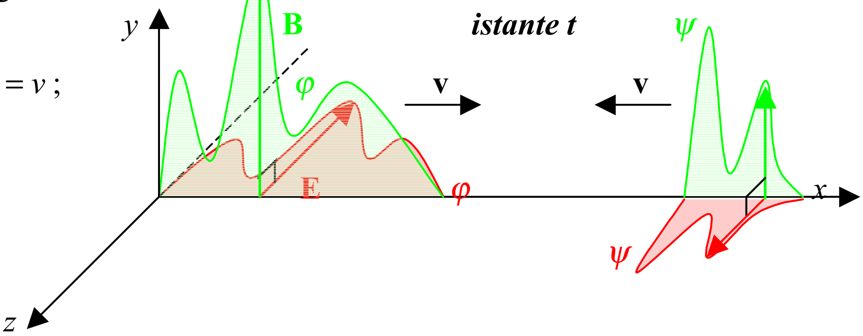
$$B_y = \frac{\psi(x + vt) - \varphi(x - vt)}{v} \quad \text{cioè che:} \quad \varphi' = -\frac{\varphi}{v} \quad \text{e} \quad \psi' = \frac{\psi}{v}$$

Vettorialmente: $\mathbf{E} \equiv (0,0,\varphi + \psi)$ e $\mathbf{B} \equiv \left(0, \dfrac{\psi - \varphi}{v}, 0\right)$

Il rapporto fra le intensità del campo elettrico e di quello magnetico ha lo stesso valore assoluto ma segno diverso, negativo per le onde nella direzione positiva delle x, positivo per le onde regressive. Questo valore è costante (in un mezzo non dispersivo, cioè in cui $v = costante$) e possiamo scrivere che per un'onda piana si ha per ogni valore di x e t :

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\varphi}{-\dfrac{\varphi}{v}} = -v \qquad \text{e} \qquad \frac{\psi}{\psi'} = \frac{\psi}{\dfrac{\psi}{v}} = v\,;$$

$$\left|\frac{\varphi}{\varphi'}\right| = \left|\frac{\psi}{\psi'}\right| = v$$



Quindi in un'onda piana polarizzata linearmente si ha, per ogni valore di x e t:

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = v \quad \text{(solo per progressive o regressive, non insieme)}$$

e nel caso in cui il mezzo sia il vuoto, $\varepsilon_r = \mu_r = 1$, si ha:

$$\frac{|\mathbf{E_0}|}{|\mathbf{B_0}|} = c$$

che vale in buona approssimazione, anche nel caso dell'aria.

Il fatto che il rapporto fra campo elettrico e campo magnetico sia costante porta di conseguenza che la forma dell'onda del campo elettrico è la stessa di quella dell'onda del campo magnetico. La perturbazione di **E** o di **B** inoltre si sposta nella direzione x con velocità v senza cambiare forma se il mezzo, come si è supposto, non è conduttore e se esso non è dispersivo. Nel caso di un mezzo dispersivo, quando cioè v dipende dalla frequenza, le varie componenti, in cui secondo l'analisi di Fourier la perturbazione iniziale si scompone, viaggiano con velocità diverse e la forma dell'onda cambia mentre si propaga.

Se supponiamo che il mezzo sia illimitato, il termine relativo all'onda regressiva svanisce e la soluzione dell'equazione delle onde si riduce alla sola onda progressiva, quindi:

$$\mathbf{E} \equiv (0,0,\varphi) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} \equiv (0,-\frac{\varphi}{v},0)$$

Nel caso in cui il vettore campo elettrico **E** vibri parallelamente all'asse y, cioè $|\mathbf{E}| = E_y$ e $E_z = 0$, otteniamo, introducendo tali condizioni nelle 4 equazioni (#) che legano E_z a B_y, ed E_y a B_z, che

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

ossia la componente dell'induzione magnetica nella direzione dell'asse delle y è costante e si può porre uguale a zero (per gli stessi motivi visti precedentemente); quindi abbiamo che $\mathbf{E} \equiv (0, E_y, 0)$ e $\mathbf{B} \equiv (0,0,B_z)$.

Considerando le equazioni rimaste che sono:

$$\varepsilon\,\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial B_z}{\partial x} \quad \text{e} \quad -\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

con analoghi passaggi matematici si ottiene il seguente risultato:

$$E_y = \Gamma(x - vt) + \Psi(x + vt) \;\;\text{e}\;\; B_z = \Gamma'(x - vt) + \Psi'(x + vt) = \frac{\Gamma(x - vt) - \Psi(x + vt)}{v}$$

e vettorialmente: $\mathbf{E} \equiv (0, \Gamma + \Psi, 0)$ e $\mathbf{B} \equiv \left(0, 0, \dfrac{\Gamma - \Psi}{v}\right)$

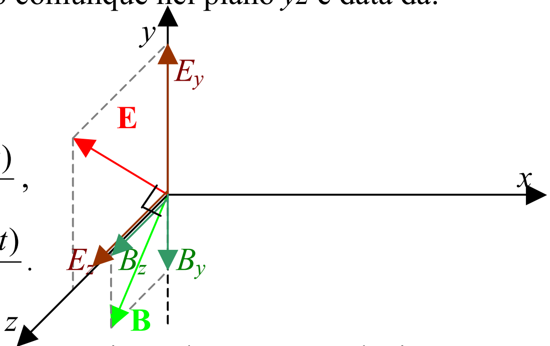
Nel caso di onde piane in cui il vettore **E** non vibri parallelamente né all'asse *z* né all'asse *y*, il vettore **E** che giace nel piano *yz* può essere scomposto in due componenti E_y ed E_z, per ciascuna delle quali si può ripetere quanto fatto in precedenza per E_z e per E_y, trovando un campo magnetico B_y associato ad E_z ed un campo B_z associato ad E_y. La soluzione del nostro problema, essendo le equazioni di Maxwell lineari, è la somma di quelle relative alle componenti dei campi.
Si può quindi dire che la soluzione generale per **E** diretto comunque nel piano *yz* è data da:

$\mathbf{E} \equiv (0, E_y, E_z)$ e $\mathbf{B} \equiv (0, B_y, B_z)$

con:

$$E_y = \Gamma(x - vt) + \Psi(x + vt), \qquad B_y = \frac{\psi(x + vt) - \varphi(x - vt)}{v},$$

$$E_z = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt), \qquad B_z = \frac{\Gamma(x - vt) - \Psi(x + vt)}{v}.$$



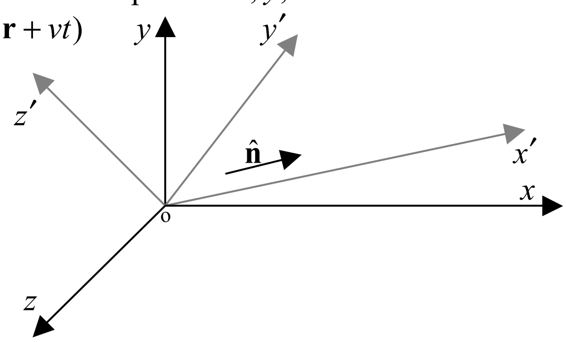
Ciò significa che nel caso generale **E** è un vettore che pur giacendo sempre nel piano *yz*, può cambiare direzione secondo i valori istantanei delle componenti. L'onda può sempre decomporsi in due onde trasversali polarizzate in piani normali fra loro *yx* e *zx*. Per ogni onda i campi elettrici e magnetici sono normali fra loro.

Nel caso in cui la direzione di propagazione, individuata dal versore $\hat{\mathbf{n}}$ non coincida con la direzione *x* del sistema di riferimento, come finora supposto, è facile trovare l'espressione della soluzione generale dell'equazione delle onde.
Se cos α, cos β, cos γ, sono i coseni direttori di $\hat{\mathbf{n}}$ nel sistema *x*, *y*, *z*, si può prendere la direzione di $\hat{\mathbf{n}}$ come asse x' di un nuovo sistema x', y', z'. In questo sistema si ha per il campo elettrico dell'onda (supposto diretto come y'):

$$E_{y'} = \Gamma(x' - vt) + \Psi(x' + vt) = \Gamma(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - vt) + \Psi(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + vt)$$

ed indicando con **r** il vettore di componenti *x*, *y*, *z*:

$$E_{y'} = \Gamma(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} - vt) + \Psi(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + vt)$$



ONDE POLARIZZATE LINEARMENTE E SINUSOIDALI.
In pratica uno dei casi più importanti è quello in cui la funzione φ considerata è sinusoidale: infatti i casi più interessanti sono quelli in cui la funzione da considerare è periodica e si può quindi rappresentare, grazie al teorema di Fourier, come la somma di un grandissimo numero (infinito) di onde sinusoidali.
Consideriamo dunque il caso in cui **E** è parallelo all'asse z e **B** è parallelo all'asse y (solo onde progressive):

$$E_z = E_0 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \qquad \text{e} \qquad B_y = -\frac{E_0}{v}\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

Vettorialmente: $\mathbf{E} = E_0 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]\hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{B} = -\frac{E_0}{v}\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]\hat{\mathbf{j}}$

la grandezza λ prende il nome di *lunghezza d'onda*; si riconosce che, per un dato valore di t, essa rappresenta la distanza fra due massimi (o due minimi) della sinusoide. Se ci mettiamo fissi in un punto, si chiama *periodo* T il tempo che dobbiamo attendere perché il campo elettromagnetico riacquisti lo stesso valore. Si riconosce che ciò accade dando a t l'incremento $T = \frac{\lambda}{v}$.

La *frequenza* υ e la *pulsazione* ω sono poi legate a T dalle note relazioni:

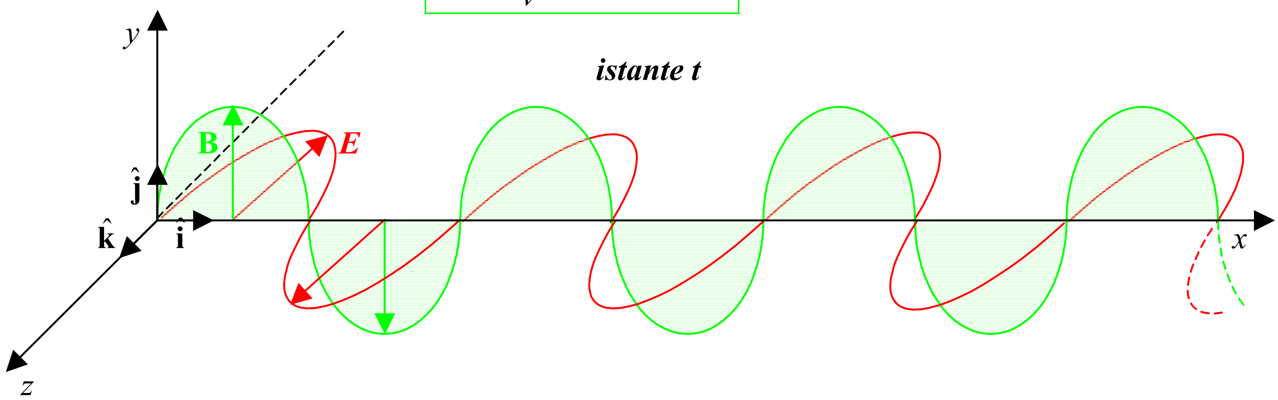
$$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}; \quad \omega = 2\pi\upsilon = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\frac{v}{\lambda}$$

Spesso si introduce una grandezza k, detta *numero d'onda*, definita come:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

così si può scrivere anche:

$$\boxed{\mathbf{E} = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{k}}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\mathbf{B} = -\frac{E_0}{v}\operatorname{sen}(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{j}}}$$



TRASPORTO DI ENERGIA DA PARTE DI UN'ONDA PIANA.
Le onde elettromagnetiche trasportano energia, così come le onde elastiche; in questo caso si tratta dell'energia associata ai campi elettrico e magnetico.

IL VETTORE DI POYNTING.
L'energia trasportata nell'unità di tempo per unità di area in un'onda elettromagnetica piana si può descrivere per mezzo di un vettore.
Definiamo un nuovo vettore detto *vettore di Poynting* ed indicato con **S**:

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}}$$

Ricordando che $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$, costruiamo il vettore **S** nel caso di onde polarizzate linearmente (solo progressive), cioè nel caso in cui $\mathbf{E} \equiv (0,0,\varphi)$ e $\mathbf{B} \equiv (0,-\frac{\varphi}{v},0)$; abbiamo quindi:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \varphi\,\hat{\mathbf{k}} \wedge -\frac{\varphi}{v\mu}\hat{\mathbf{j}} = \frac{\varphi^2}{\mu}\sqrt{\varepsilon\mu}\,\hat{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{k}} = \varphi^2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\hat{\mathbf{i}}$$

Il vettore **S** ha la caratteristica di mantenersi ortogonale al campo elettrico ed al campo magnetico.
La densità di energia del campo elettromagnetico per i campi variabili ha la stessa forma di quella per campi statici (si può dimostrare vedi: Sette) e cioè:

$$w_{E,H} = w_E + w_H = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{1}{2}\varepsilon\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon\varphi^2 + \frac{\varphi^2}{v^2\mu}\right] = \frac{1}{2}\varepsilon\varphi^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\varphi^2 = \varepsilon\varphi^2$$

dalla quale si nota che la <u>*densità di energia dovuta al campo elettrico è uguale alla densità di energia dovuta al campo magnetico*</u>.
E siccome $w_{E,H} = \varepsilon\varphi^2(x - vt)$, cioè la densità di energia è funzione dell'argomento $x - vt$, ciò significa che:

a) essa si propaga con velocità v nel verso stesso in cui si propaga il campo elettromagnetico corrispondente;
b) varia sia per un determinato valore di x in funzione di t, che per un determinato valore di t in funzione di x.

N.B. Si noti che in generale si ha che: $w_{E,H} = w_{E,H}(x,y,z,t)$, e, non come in questo caso (onde piane), $w_{E,H} = w_{E,H}(x,t)$.

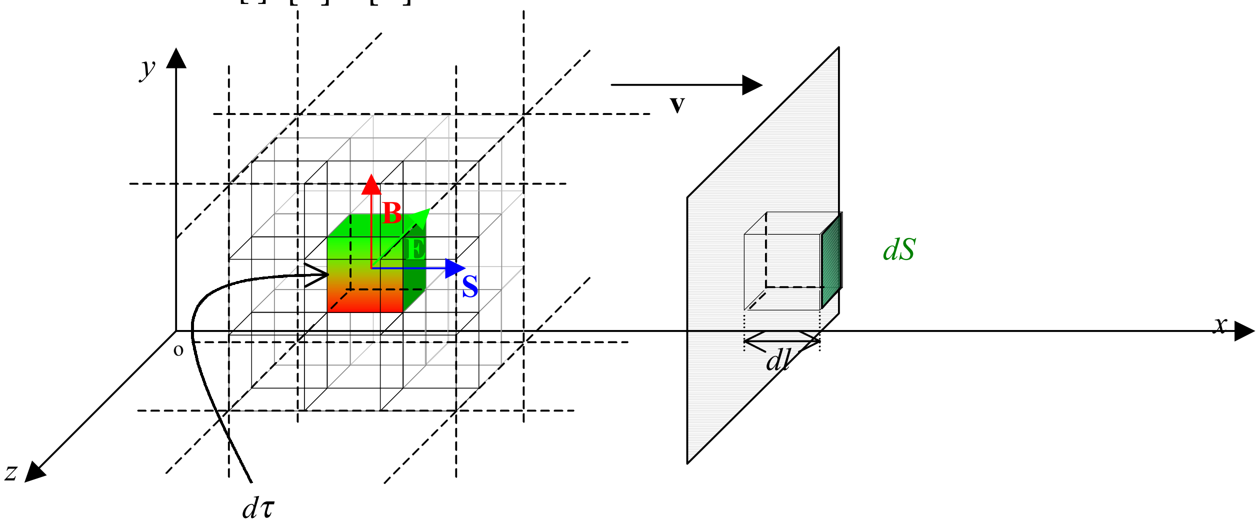
Possiamo anche scrivere: $w_{E,H} = \varepsilon\,E^2 = \dfrac{B^2}{\mu}$

Facendo alcuni passaggi troviamo una forma del modulo di S:

$$S = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\varphi^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}\varphi^2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\varphi^2 = v\varepsilon\,\varphi^2 = v\,w_{E,H}$$

Quindi il vettore di Poynting è proporzionale alla velocità con cui si propaga l'onda elettromagnetica ed alla densità di energia del campo elettromagnetico. Da questa espressione deduciamo le dimensioni del vettore di Poynting:

$$[S] = [v]\cdot[w_{E,H}] = \frac{[l]}{[t]}\cdot\frac{[U]}{[l^3]} = \frac{[W]}{[l^2]}$$



Il vettore di Poynting è un vettore che in ogni punto fornisce con la sua direzione la direzione in cui si propaga l'energia e con il suo modulo l'*intensità istantanea*, cioè, la potenza istantanea che attraversa una superficie unitaria disposta in direzione perpendicolare al vettore stesso.

$$S = v\, w_{E,H} = \frac{dl}{dt}\frac{dU}{d\tau} = \frac{dU}{dt}\frac{1}{dS} = \frac{P}{dS} = I$$

N.B. Si noti bene che, nel caso da noi considerato (onde piane), si ha che $S = S(x,t)$ e quindi $I(x,t)$, ma in generale entrambi dipendono da *x*, *y*, *z* e *t*.

Nel caso di onde piane sinusoidali, cioè nel caso in cui:

$$\mathbf{E} = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{k}} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = -\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{j}} \qquad \left(\text{con } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ e } \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

si ha:

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_0^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)\,\hat{\mathbf{i}}$$

Se consideriamo in questo caso la media temporale su di un periodo *T* del modulo vettore di Poynting abbiamo:

$$< S >_T = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{E_0^2}{2}$$

$$E_{efficace} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T E^2(t)\, dt}$$

$$E_{efficace} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

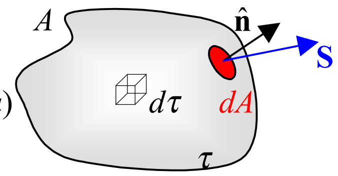
quindi:

$$< S >_T = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E^2_{efficace}$$

Per qualsiasi forma delle onde il vettore di Poynting ha sempre la direzione del flusso di energia.
Di conseguenza se si ha una sorgente di radiazione qualsiasi e si vuol determinare la potenza emessa, si può, per effettuare il calcolo, prendere una superficie chiusa che circondi la sorgente e determinare il flusso del vettore di Poynting attraverso essa.

IL FLUSSO DEL VETTORE DI POYNTING.

Consideriamo una regione di spazio, racchiusa da una superficie *A*, e calcoliamo il flusso del vettore di Poynting attraverso essa.



$$\Phi_A(\mathbf{S}) = \int_A \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_\tau \nabla\cdot\mathbf{S}\, d\tau \quad (\textit{per il teorema della divergenza})$$

$\nabla\cdot\mathbf{S} = \nabla\cdot(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot(\nabla\wedge\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla\wedge\mathbf{H})$ e sostituendo le equazioni di Maxwell abbiamo:

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = \mathbf{H}\cdot\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

Andiamo a riconoscere qualche termine:

a) $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\cdot\mu\,\mathbf{H} + \mathbf{H}\cdot\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 2\mu\,\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 2\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{H}\cdot\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})}$$

b) $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cdot\varepsilon\,\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}2\varepsilon\,\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 2\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})}$$

così possiamo scrivere:

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{S} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) = -\frac{\partial w_H}{\partial t} - \frac{\partial w_E}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial w_{E,H}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}}$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA NEI FENOMENI ELETTROMAGNETICI.

$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = (dq\,\mathbf{E} + dq\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}\,dt = dq\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\,dt \qquad \left[\textit{dato che } (\mathbf{v}\wedge\mathbf{B})\cdot\mathbf{v} = 0, \textit{ in quanto } (\mathbf{v}\wedge\mathbf{B})\perp\mathbf{v}\right]$

$$w_j = \frac{dU}{d\tau} = \frac{\mathbf{F}}{d\tau}\cdot d\mathbf{l} = \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l} = \frac{dq}{d\tau}\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\,dt = \rho\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\,dt = \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,dt$$

$$\left[\textit{dato che } \mathbf{J} = n\,q_p\mathbf{v} = \frac{dN}{d\tau}q_p\mathbf{v} = \frac{dq}{d\tau}\mathbf{v} = \rho\,\mathbf{v}, \textit{ con } q_p \textit{ carica del singolo portatore di carica}\right]$$

avendo indicato con **f** la *densità di forza*.

$$\boxed{-\frac{dU_{E,H}}{dt} = \Phi_A(\mathbf{S}) + \frac{dU_j}{dt}}$$

$$-\frac{\partial\left[\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right]}{\partial t} = \nabla\cdot\mathbf{S} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$$

QUANTITÀ DI MOTO DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO. TENSORE DEGLI SFORZI DI MAXWELL.

Oltre a trasportare energia, le onde elettromagnetiche possono anche trasportare quantità di moto. In altri termini, è possibile esercitare una pressione (una <u>*pressione di radiazione*</u>) su un oggetto illuminandolo. Tali forze devono essere piccole rispetto alle forze che si incontrano nella normale esperienza quotidiana perché normalmente non le si notano. Dopo tutto, non si cade all'indietro quando si apre la tapparella ad una finestra in una stanza buia e ci si lascia illuminare dal Sole. Gli effetti della pressione di radiazione, tuttavia, sono importanti nei cicli vitali delle stelle a causa delle temperature incredibilmente alte ($2\times10^7\ K$ nel caso del Sole) che si attribuiscono ai nuclei stellari. Le prime misure di pressione di radiazione vennero eseguite nel 1901-1903 da Nichols e Hull negli Stati Uniti e da Lebedev in Russia, circa 30 anni dopo che l'esistenza di tali effetti era stata predetta teoricamente da Maxwell.

Il campo elettromagnetico esercita delle forze sulle cariche elettriche e quindi trasferisce ad esse quantità di moto. Vogliamo stabilire un bilancio della quantità di moto del campo elettromagnetico, analogamente a quanto si è fatto prima per l'energia. Per arrivare al risultato bisognerà partire dalla espressione $\mathbf{f}(x,y,z) = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}) = \rho\,\mathbf{E} + \mathbf{j}\wedge\mathbf{B}$ per la forza per unità di volume e calcolare la risultante **R** di tutte le forze esercitate dal campo elettromagnetico sulle cariche e correnti contenute in un volume τ

$$\mathbf{R} = \int_\tau \mathbf{f}\, d\tau = \int_\tau (\rho\,\mathbf{E} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) d\tau \,.$$

Questa forza è uguale alla quantità di moto trasferita per unità di tempo dal campo elettromagnetico alle cariche elettriche. Il principio della conservazione delle quantità di moto stabilisce che a questa forza deve essere associata una qualche forma di quantità di moto legata alla presenza del campo elettromagnetico. Bisognerà quindi esprimere la relazione di sopra in funzione del campo elettromagnetico facendo uso delle *equazioni di Maxwell*. Il procedimento è del tutto analogo a quello seguito per l'energia, solo che risulta formalmente più complesso essendo la relazione di sopra vettoriale.

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{G})}{dt} = \int_A \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$

EQUAZIONI DI PROPAGAZIONE DEL POTENZIALE VETTORE E DEL POTENZIALE SCALARE.

Riprendiamo, adesso, le equazioni di Maxwell che qui riscriviamo per il caso *del vuoto* omettendo però, per semplicità di scrittura, l'indice "zero" in basso con cui avevamo contrassegnato precedentemente i vettori elettrici e magnetici nel vuoto.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \quad (1) \\ \nabla \wedge \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \quad (2) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \quad (3) \\ \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \quad (4) \end{cases}$$

L'equazione 3 ci dice che il campo **B** è solenoidale.

Ricordiamo ora la definizione di *potenziale vettore*:

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}}$$

essa garantisce automaticamente che l'equazione 3 sia soddisfatta [poiché $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{v}) = 0$, con **v** vettore qualunque].

Ricordiamo anche che il potenziale vettore è definito a meno di un termine additivo dato dal gradiente di un campo scalare arbitrario. Infatti:

$$\exists \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\ \varphi = \mathbf{A} + \nabla\varphi : \mathbf{B}' = rot(\mathbf{A} + grad\ \varphi) = \nabla \wedge (\mathbf{A} + \nabla\varphi) = \nabla \wedge \mathbf{A} + \cancel{\nabla \wedge \nabla\varphi} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Questa arbitrarietà può essere utilmente sfruttata imponendo al potenziale vettore di soddisfare un'altra condizione in modo da facilitarne il calcolo.

Sostituendo questa espressione di **B** nella 2 otteniamo:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \mathbf{A} = \nabla \wedge \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

da cui si ottiene:

$$\nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

questa equazione stabilisce che il vettore $\mathbf{E} + \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ è sempre conservativo, e quindi è esprimibile come il gradiente di un campo scalare; possiamo, dunque, scrivere, in modo del tutto generale:

$$\boxed{\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V}$$

dove V è una funzione delle coordinate x, y, z, t che prende il nome di *potenziale scalare*.

Nel caso stazionario $\left(\frac{\partial A}{\partial t} = 0\right)$, esso si identifica con il potenziale elettrostatico.

Possiamo, quindi, scrivere:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

e tale relazione esprime il campo elettrico in termini del potenziale vettore **A** e del potenziale scalare V.

Il potenziale scalare è definito a meno di un termine additivo dato da uno scalare u dipendente solo dal tempo, cioè $u = u(t)$, infatti:

$$\exists V' = V + u(t) : \mathbf{E}' = -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V - \nabla u(t) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}$$

poiché $\nabla u(t) = 0$ in quanto $\frac{\partial u(t)}{\partial x} = \frac{\partial u(t)}{\partial y} = \frac{\partial u(t)}{\partial z} = 0$.

Dalla 4 otteniamo:

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{j}$$

Vista l'arbitrarietà con cui sono stati definiti **A** e V (nel caso stazionario si ricordi che abbiamo approfittato dell'arbitrarietà di **A** per imporre al potenziale vettore di soddisfare una condizione aggiuntiva) la cosa migliore che possiamo fare nel caso presente, in cui le grandezze dipendono anche dal tempo in modo del tutto generale, è di imporre una condizione tale da semplificare il più possibile l'ultima relazione scritta.

Questa condizione è:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0} \quad \textbf{Condizione di Lorentz}$$

valida per tutti i valori di x, y, z, t e che ricorda l'equazione di continuità della carica: $\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Con questa condizione l'equazione precedente diventa:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}}$$

Definiamo l'*operatore di D'Alembert*:

$$\Box = \nabla^2 \ldots - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ldots = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ldots + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ldots + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\ldots - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ldots, \text{ con } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

per cui possiamo scrivere:

$$\boxed{\Box \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}}$$

Consideriamo adesso la 1 :

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\nabla\cdot\left(-\nabla V-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow\ -\nabla^2 V-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\mathbf{A}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

e considerando che per la condizione di Lorentz si ha: $\nabla\cdot\mathbf{A}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$

abbiamo:

$$\boxed{\nabla^2 V-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\Box V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

In generale:

$\Box C(\mathbf{r}',t')=-S(\mathbf{r},t)$

$$C(\mathbf{r}',t')=\frac{1}{4\pi}\int_\tau\frac{S(\mathbf{r},t)}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}d\tau$$

dove $d\tau=dx\,dy\,dz$ e $t'=t+\Delta t$ con $\Delta t=\frac{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{v}$ $\left(v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$.

INVARIANZA DI RICALIBRATURA (GAUGE INVARIANCE).

In precedenza abbiamo visto che il vettore **A** risulta determinato a meno di un termine additivo consistente nel gradiente di uno scalare arbitrario φ. In altre parole **B**, calcolato a mezzo della: $\mathbf{B}=\nabla\wedge\mathbf{A}$, non cambia se si fa la trasformazione:

$$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{A}'$$

dove: $\mathbf{A}'=\mathbf{A}+grad\,\varphi$.

Se vogliamo però che questa trasformazione non faccia cambiare neppure **E**, è necessario fare, insieme alla sostituzione $\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{A}'$, anche la sostituzione:

$$V\rightarrow V'$$

dove: $V'=V-\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, cioè si deve avere: $\boxed{u(t)=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}}$

poiché si deve avere: $\mathbf{E}=-\nabla V-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$.

Se noi passiamo da una scelta di **A** e V che soddisfa la condizione di Lorentz ad altri $\mathbf{A}'$ e V' che continuano a soddisfare la condizione di Lorentz si avrà:

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A}'+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V'}{\partial t}=\nabla\cdot(\mathbf{A}+\nabla\varphi)+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(V+u(t))}{\partial t}=\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}+\nabla^2\varphi+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial u(t)}{\partial t}=0$$

che per la condizione di prima dà:

$$\nabla^2\varphi+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial u(t)}{\partial t}=0$$

che aggiunta alla condizione trovata prima e cioè: $u(t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, dà:

$\nabla^2 \varphi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$, che si può scrivere:

$\boxed{\Box \varphi = 0}$

Le diverse possibili scelte di **A** e *V*, lasciando immutati **B** ed **E** si chiamano diverse "gauge", tradotto in italiano diverse "calibrature".
L'invarianza di **B** ed **E** rispetto alle trasformazioni da una "gauge" ad un'altra cioè rispetto alle trasformazioni di gauge o di calibratura si chiamo *invarianza di gauge*.
La classe di calibrature che soddisfano la condizione di Lorentz viene chiamata *calibratura di Lorentz*.