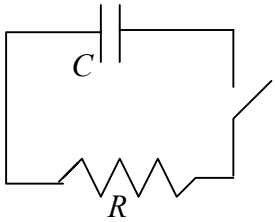
PROCESSO DI SCARICA DI UN CONDENSATORE.

Ai circuiti in *condizioni quasi stazionarie* possono applicarsi la legge di Ohm generalizzata e le regole di Kirchhoff come relazioni fra i valori istantanei delle grandezze che vi intervengono.

Consideriamo il caso della scarica di un condensatore di capacità C attraverso una resistenza R.
Il condensatore avente carica Q_0 e d.d.p. V_0 venga collegato ad R all'istante $t = 0$ chiudendo un interruttore. Cariche fluiscono (corrente i) attraverso R ed energia viene dissipata. La carica su ciascuna armatura (Q), la d.d.p. ai capi del condensatore e l'energia immagazzinata in esso decrescono nel tempo.
È evidente che il condensatore nei riguardi di R funziona come un generatore di f.e.m. variabile e resistenza interna uguale a zero.
L'equazione del circuito è:



$$V = R\,i \quad \text{con } V \text{ e } i \text{ funzioni del tempo}$$

Si può porre: $V = \dfrac{Q}{C}$

e $-dQ = i\,dt$ (cioè $i = -\dfrac{dQ}{dt}$) dove il segno meno si presenta perché con dQ indichiamo la variazione di carica sulle armature invece della carica che passa nel conduttore ($dq = -dQ$).

Si ottiene così per Q l'equazione differenziale:

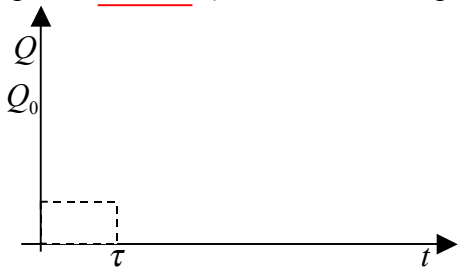
$$\frac{Q}{C} = -\frac{dQ}{dt}\,R$$

che si può risolvere per separazione delle variabili:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

da cui si ha: $\ln Q = -\dfrac{t}{RC} + \ln k \;\Rightarrow\; Q(t) = k\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ avendo posto $\tau = RC$ (τ costante di tempo)
e tenendo conto che per $t = 0$ si ha $Q = Q_0$ avremo:

$$Q(t) = Q_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

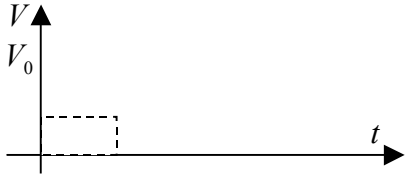


Osserviamo che dopo un tempo per $t = \tau$ la carica sulle armature si è più che dimezzata:

$$Q(t = \tau) = \frac{Q_0}{e} \cong 36\,\%\,Q_0$$

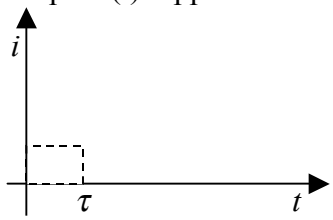
La dipendenza dal tempo della d.d.p. ai capi del condensatore si ottiene dividendo per C la carica sulle sue armature e cioè:

$$V(t) = V_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$



L'andamento temporale della corrente si ottiene dividendo per R la d.d.p. $V(t)$ oppure dalla relazione $i = -\frac{dQ}{dt}$ e quindi si ha:

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$ avendo posto $i_0 = \frac{V_0}{R}$



N.B. $Q(t)$, $V(t)$ ed $i(t)$ decadono esponenzialmente con la stessa costante di tempo che è $\tau = RC$.

Inizialmente tutta l'energia del sistema è localizzata nel condensatore e si calcola:

$$U(0) = U_C(0) = \frac{1}{2} C V_0^2$$

Calcoliamo l'energia dissipata per effetto Joule dal circuito in un tempo infinito:

$$U_J(\infty) = \int_0^\infty w_J \, dt = \int_0^\infty i^2(t) R \, dt = R\, i_0{}^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{t}{\tau}} = R\, i_0{}^2 \frac{\tau}{2} [e^{-2\frac{t}{\tau}}]_{-\infty}^0 = R\, i_0{}^2 \frac{RC}{2}(1-0) = (R\, i_0{}^2)\frac{C}{2} = \frac{1}{2} C V_0^2$$

Quindi tutta l'energia potenziale elettrostatica conservata nel condensatore viene trasformata in calore.

PROCESSO DI CARICA DI UN CONDENSATORE.

Consideriamo adesso il caso della carica di un condensatore di capacità C da parte di una sorgente di f.e.m. (f, r) attraverso una resistenza R_e. Si osservi che man mano che la carica procede il condensatore si comporta come una sede di f.e.m. (avente $f' = V$ ed $r' = 0$) diretta in verso opposto ad f giacché le cariche accumulate sulle armature tendono a spingere le cariche in verso opposto a quello della corrente prodotta da f. Si ha quindi per l'equazione del circuito:

$$f - V = iR \qquad \text{dove } R = r + R_e$$

In questo caso si ha: $dQ = i\, dt$

e $V = \frac{Q}{C}$

da cui otteniamo l'equazione differenziale per Q *non omogenea a coefficienti costanti*:

$$f = \frac{dQ}{dt} R + \frac{Q}{C}$$

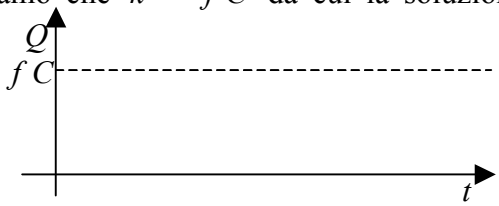
per la cui risoluzione dobbiamo considerare prima l'equazione *omogenea associata* che è:

$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0$ e separando le variabili si ha: $\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$ e ponendo al solito $\tau = RC$ otteniamo:

$Q(t) = k\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ soluzione generale dell'omogenea associata

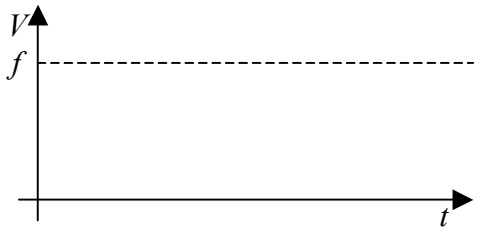
per $t \to \infty$ si ha $\frac{dQ}{dt} = 0$ (poiché il condensatore non può accumulare una carica infinita e quindi da un certo istante in poi Q non dipenderà più dal tempo e quindi sarà costante), per cui $Q_\infty = f\,C$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale
e ponendo le condizioni iniziali $Q = 0$ per $t = 0$ otteniamo che $k = -f\,C$ da cui la soluzione dell'equazione differenziale non omogenea è:

$$Q(t) = f\,C(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



sempre con $\tau = R\,C$.
Possiamo così ottenere anche:

$$V(t) = f(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



$$i(t) = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Moltiplichiamo l'equazione del circuito per $dQ = i\,dt$ ottenendo così:

$$i\,f\,dt = i^2 R\,dt + dQ\frac{Q}{C}$$

$i\,f\,dt$ è l'energia *erogata* dal generatore
$i^2 R\,dt$ è l'energia dissipata dalla resistenza per effetto *Joule*
$dQ\frac{Q}{C}$ è l'energia *utilizzata* per caricare il condensatore

quindi:

$$dU_e = dU_J + dU_u$$

$$U_u(\infty) = \frac{1}{C}\int_{Q(0)}^{Q(\infty)} d\left(\frac{Q^2}{2}\right) = \frac{1}{2}Cf^2 \qquad \text{poiché } Q(\infty) = f\,C \text{ e } Q(0) = 0$$

$$U_e(\infty) = f\int_0^\infty \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{f^2}{R} RC = Cf^2$$

$$U_J(\infty) = \frac{R f^2}{R^2}\int_0^\infty e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = \frac{f^2}{R}\frac{RC}{2} = \frac{1}{2}Cf^2$$

N.B. Tutta l'energia erogata dal generatore di forza elettromotrice si ripartisce in parti uguali in energia immagazzinata nel condensatore ed in energia dissipata per effetto Joule nella resistenza.

FORZA TRA LA ARMATURE DI UN CONDENSATORE (domanda d'esame).

Vogliamo illustrare *il metodo di calcolo delle forze*, considerando il caso di un sistema di due soli conduttori i quali, per semplicità, siano piani e costituiscano un condensatore: una delle armature sia fissa ad $x = 0$ e cerchiamo la forza che sollecita la seconda armatura a distanza x (la forza sulla prima armatura è uguale ed opposta).

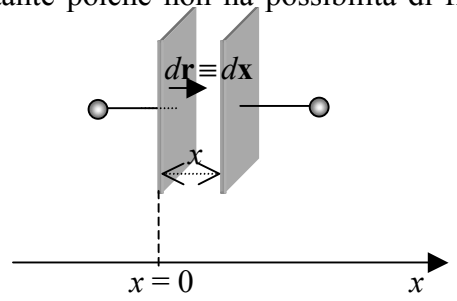
I CASO. Condensatore isolato (carico) ⇨ Q = costante

La carica presente tra le armature del condensatore è costante poiché non ha possibilità di fluire. Abbiamo:

$$dU_{meccanica} + dU_{elettrostatica} = 0$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\nabla U_{elettrostatica}\big|_{Q=costante}\, d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{F} = -\nabla U_{elettrostatica}\big|_{Q} = -\nabla\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right)_{Q} = -\frac{Q^2}{2}\nabla\left(\frac{1}{C}\right)$$



Nel nostro caso di condensatore piano il problema è unidimensionale perciò $d\mathbf{r} = d\mathbf{x}$ e la capacità in funzione della distanza tra le armature è:

$C(x) = \varepsilon\frac{S}{x}$ per cui

$F = -\frac{Q^2}{2}\nabla\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{Q^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\varepsilon S}\right) = -\frac{Q^2}{2\varepsilon S}$ *forza attrattiva* diretta in verso opposto a quello delle x

II CASO. Condensatore alimentato da un generatore di f.e.m. f ⇨ $V = f$

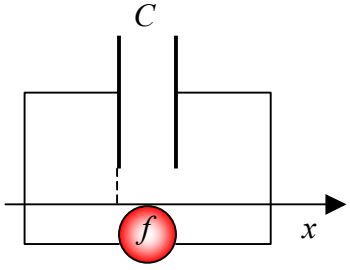
È possibile far sì che durante la variazione della configurazione del sistema i potenziali dei conduttori restino costanti: ciò richiede che le cariche sulle armature varino con la distanza (x) fra le armature stesse. Si possono realizzare tali condizioni mantenendo durante lo spostamento le armature collegate con un generatore; tale generatore ha il compito di inviare sulle armature o ritirare da esse cariche nelle quantità richieste per mantenere costante, alle varie distanze fra i conduttori, il loro potenziale. Ciò porta di conseguenza che la variazione di energia del sistema deve tenere conto del flusso di energia da o verso il generatore.

Abbiamo:

$$dU_{elettromotrice} = dU_{meccanica} + dU_{elettrostatica}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \nabla(U_{elettromotrice} - U_{elettrostatica})\big|_{V=costante}\, d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{F} = \nabla\left(\frac{1}{2}CV^2\right)_{V} = \frac{V^2}{2}\nabla(C)$$



Abbiamo sempre $d\mathbf{r} = d\mathbf{x}$ e $C = \varepsilon\frac{S}{x}$ per cui:

$F = \frac{V^2}{2}\nabla(C) = \frac{V^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\varepsilon S}{x}\right) = -\frac{V^2}{2}\frac{\varepsilon S}{x^2}$ *forza attrattiva* diretta in verso opposto a quello delle x