

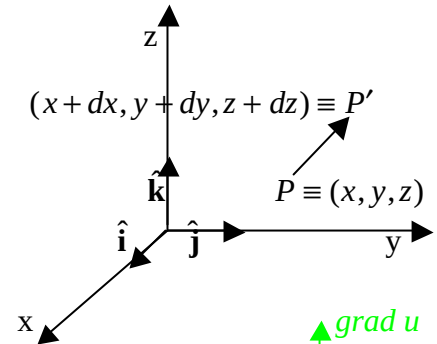
DERIVATA DI UNA GRANDEZZA SCALARE RISPETTO AD UNA DIREZIONE

Consideriamo un campo scalare $u(x, y, z)$ e, partendo da un punto di coordinate x, y, z , spostiamoci di un tratto infinitesimo $d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}$. A causa di questo spostamento la funzione u , che supponiamo continua e derivabile, subirà una variazione du , pure infinitesima, la cui entità dipende evidentemente sia dalla grandezza che dalla direzione del vettore spostamento. La variazione du che subisce la funzione u , non è altro (a meno di infinitesimi di ordine superiore) che il suo differenziale totale e si può quindi scrivere:

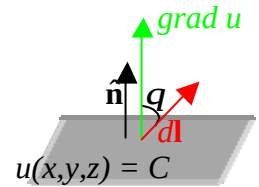
$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

cioè:

$$du = d\mathbf{l} \cdot \text{grad } u$$



Per renderci conto del significato del vettore $\text{grad } u$, preso un punto P , consideriamo la superficie di livello del campo scalare $u(x, y, z)$ passante per P e spostiamoci di $d\mathbf{l}$ sopra la superficie stessa: la variazione du che subisce la funzione è nulla per definizione di superficie di livello, cioè si ha che $d\mathbf{l} \cdot \text{grad } u = 0$ e siccome sia $d\mathbf{l}$ che $\text{grad } u$ sono, per ipotesi, vettori di modulo diverso da zero, ne segue che, affinché il loro prodotto scalare sia nullo, essi debbono necessariamente essere ortogonali tra loro. Dato che questa considerazione si può ripetere per qualsiasi spostamento $d\mathbf{l}$ purché giacente sulla superficie di livello $u(x, y, z) = C$, possiamo concludere che il vettore $\text{grad } u$ è ortogonale alla superficie di livello o, ciò che è lo stesso, le linee di flusso del vettore $\text{grad } u$ sono ortogonali alle superfici di livello del campo scalare $u(x, y, z)$.



Se ora consideriamo il caso in cui lo spostamento $d\mathbf{l}$ avviene in direzione ortogonale alla superficie di livello (ossia nella direzione della linea di flusso) e lo indichiamo con $d\mathbf{n}$, abbiamo:

$$du = d\mathbf{n} \cdot \text{grad } u = |\text{grad } u| dn$$

dato che $d\mathbf{n}$ è parallelo a $\text{grad } u$; dividendo per dn si ottiene:

$$\frac{du}{dn} = |\text{grad } u|$$

ossia il modulo del vettore $\text{grad } u$ rappresenta il rapporto dell'incremento du , che subisce la funzione u per uno spostamento $d\mathbf{n}$ ortogonale alla superficie di livello, allo spostamento stesso.

Se lo spostamento $d\mathbf{l}$ avviene in una direzione diversa da quella della normale alla superficie di livello, abbiamo:

$$du = d\mathbf{l} \cdot \text{grad } u = |\text{grad } u| dl \cos q$$

dove q è l'angolo tra $\hat{\mathbf{n}}$ ($\hat{\mathbf{n}}$ è parallelo e concorde a $\text{grad } u$) e $d\mathbf{l}$; da questa espressione dividendo per dl , si ottiene la *derivata direzionale rispetto ad una direzione qualsiasi*:

$$\frac{du}{dl} = |\text{grad } u| \cos q = \frac{du}{dn} \cos q$$

ossia, dato che $\cos q$ è al massimo uguale ad 1, possiamo dire che la derivata direzionale di u rispetto ad una direzione qualsiasi è massima quando questa direzione coincide con quella della normale alla superficie di livello, in altri termini il vettore $\text{grad } u$ è ortogonale alla superficie di livello e la sua direzione coincide con la direzione in cui la funzione $u(x, y, z)$ varia maggiormente.