OPERATORI

Con la parola *operatore* si indica l'insieme delle operazioni da eseguire quando si passa da una grandezza ad un'altra.

Sia $u = u(x, y, z)$ un campo scalare e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ un campo vettoriale, definiamo:

$$\boxed{grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}}$$

$$\boxed{div\ \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}}$$

$$\boxed{rot\ \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}}$$

N.B. Per indicare *rot* **v** si usa anche la notazione *curl* **v**.
Introduciamo un operatore vettoriale, detto *operatore nabla* ed indicato con ∇, definito da:

$$\boxed{\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}$$

Introduciamo un altro operatore, detto *operatore di Laplace* o *laplaciano* ed indicato con Δ, definito da:

$$\boxed{\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

Così abbiamo che:

$\boxed{grad\ u = \nabla u}$ $\boxed{div\ \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}}$ $\boxed{rot\ \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}}$

Le proprietà fondamentali sono:

$\boxed{div\ rot\ \mathbf{v} = 0}$ (tenendo conto del *teorema di Schwarz*) $\rightarrow$ il vettore *rot* **v** è sempre solenoidale

Se $\mathbf{v} = grad\ u$ si ha:

$\boxed{rot\ \mathbf{v} = rot\ grad\ u = 0}$ (poiché per $\mathbf{v} = grad\ u$ si ha $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$, …, …)

$\boxed{rot\ rot\ \mathbf{v} = grad\ div\ \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}}$ (visto che mediante l'uso di ∇ si ha: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\overbrace{\nabla \cdot \nabla}^{\nabla^2 = \Delta})\mathbf{v}$)